第４章 産業連関表に関連する数学知識

１ 行列

⑴ スカラー・行列・ベクトル

日常生活において、数の計算をする場合は、

$$1000+2+30 = 1032$$
$$100\times40\div5 = 800$$

といったように、１つの数字(「1000」、「2」、「3」等)同士の加減乗除を行う場合が多いと思います。この「1」、「2」、「30」、「1032」、「100」、「40」のような単一の数字を「スカラー」と呼んでいます。

これに対して、複数の数字同士を処理する数学上の手法として行列計算というものがあります。では、行列とはどのようなものを指すのか以下で説明します。

$$\begin{pmatrix} 1 & 80 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 100 & 50 & 21 \\ 2 & 39 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 90 \\ 67 & 1 \\ 3 & 32 \end{pmatrix}$$

このような複数の数字を縦横に並べて括弧で囲んだものを行列と言います。

上にあるものは、３つの行列で、左から順に 2 行 2 列の行列(または 2×2 行列)、2 行 3 列の行列(または 2×3 行列)、3 行 2 列の行列(または 3×2 行列)といいます。

一般的には、次のように表されます。

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \text{第1列} & \text{第2列} & & & \text{第n列} \\ \downarrow & \downarrow & & & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{第1行} \rightarrow \\ \text{第2行} \rightarrow \\ \\ \\ \text{第m行} \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

「a_{11}」、「a_{12}」等の行列を構成している１つ１つの数字を行列「要素」（または「成分」）といいます。

また、行列を表記する場合、これまでの例のようにその行列の全要素を表記することもありますが、「行列Ａ」等とローマ字の大文字を用いて簡略化して表記することが多くあります。

なお、行と列のどちらかが１つであるものを「ベクトル」といいます。例えば、

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \\ 3 \end{pmatrix}$$

というようになります。

そして、左側を「行ベクトル」といい、右側を「列ベクトル」といいます。

⑵ 行列の加減算

同じ型の行列同士の場合のみ、行列の足し算や引き算ができます。例えば、

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+10 & 1+4 \\ 2+3 & 2+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 3 & 2 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-6 & 4-9 & 5-8 \\ 1-3 & 3-2 & 12-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

というようになります。つまり、同じ位置同士の要素を加減するということです。

ですので、繰り返しになりますが、同じ型の行列同士でないと、加減する相手方の要素がないため計算できないことになります。

そして、同じ型の行列である限り、行列Ａ、行列Ｂ、行列Ｃの間には、以下の法則が成立します。

交換法則	Ａ＋Ｂ	＝	Ｂ＋Ａ
結合法則	Ａ＋（Ｂ＋Ｃ）	＝	（Ａ＋Ｂ）＋Ｃ

⑶ スカラー×行列

スカラーと行列の乗算は、行列の各要素をスカラー倍することになります。例えば、

$$3\times\begin{pmatrix} 5 & 1 & 9 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times5 & 3\times1 & 3\times9 \\ 3\times2 & 3\times2 & 3\times4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 3 & 27 \\ 6 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

というようになります。

スカラーと行列の乗算の場合も、加減算と同様に交換法則、結合法則がともに成立し、さらに分配法則も成立します。

ｍ、ｎをスカラーとし、Ａ、Ｂを行列とすると、以下の関係が成立します。

交換法則		ｍＡ	＝	Ａｍ
結合法則		（ｍｎ）Ａ	＝	ｍ（ｎＡ）
分配法則	①	ｍ（Ａ＋Ｂ）	＝	ｍＡ＋ｍＢ
	②	（ｍ＋ｎ）Ａ	＝	ｍＡ＋ｎＡ

(4) 行列×行列

行列同士の乗算は、かけられる行列(左側)の列の数とかける行列(右側)の行の数が等しい場合に可能です。

その結果(積)の行列は、かけられる行列(左側)の行の数とかける行列(右側)の列の数の行列になります。

掛け算の答えは、外側の行と列

(2×3 行列)×(3×1 行列)

内側が同じだと掛け算できる

例えば、上の例では、左側の列数(3)と右側の行数(3)が同じですので、乗算が可能です。

また、その答となる行列は、左側の行数(2)と右側の列数(1)となりますので、(2×1 行列)になります。

では、次に乗算計算の方法です。

例えば、つぎのようにします。

$$\begin{pmatrix}5 & 8\\ 2 & 4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}10 & 4\\ 3 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(5\times10)+(8\times3) & (5\times4)+(8\times8)\\ (2\times10)+(4\times3) & (2\times4)+(4\times8)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}74 & 84\\ 32 & 40\end{pmatrix}$$

左側の行列の行の各要素と右側の行列の列の同じ順番の要素をそれぞれ掛けて、足していっています。一つずつ行うと次のようになります。

まず、答えとなる行列の１行１列の要素を計算します。

$$\begin{pmatrix}5 & 8\\ 2 & 4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}10 & 4\\ 3 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boxed{(5\times10)+(8\times3)} & (5\times4)+(8\times8)\\ (2\times10)+(4\times3) & (2\times4)+(4\times8)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boxed{74} & 84\\ 32 & 40\end{pmatrix}$$

次に、答えとなる行列の 1 行 2 列の要素を計算します。

$$\begin{pmatrix} \boxed{5 \quad 8} \\ 2 \quad 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 & \boxed{\begin{matrix} 4 \\ 8 \end{matrix}} \\ 3 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (5\times10)+(8\times3) & \boxed{(5\times4)+(8\times8)} \\ (2\times10)+(4\times3) & (2\times4)+(4\times8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 74 & \boxed{84} \\ 32 & 40 \end{pmatrix}$$

次に、答えとなる行列の 2 行 1 列の要素を計算します。

$$\begin{pmatrix} 5 \quad 8 \\ \boxed{2 \quad 4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 10 \\ 3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 4 \\ 8 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (5\times10)+(8\times3) & (5\times4)+(8\times8) \\ \boxed{(2\times10)+(4\times3)} & (2\times4)+(4\times8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 74 & 84 \\ \boxed{32} & 40 \end{pmatrix}$$

最後に、答えとなる行列の 2 行 2 列の要素を計算します。

$$\begin{pmatrix} 5 \quad 8 \\ \boxed{2 \quad 4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \begin{matrix} 10 \\ 3 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 4 \\ 8 \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (5\times10)+(8\times3) & (5\times4)+(8\times8) \\ (2\times10)+(4\times3) & \boxed{(2\times4)+(4\times8)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 74 & 84 \\ 32 & \boxed{40} \end{pmatrix}$$

もちろん、計算の順番は自由ですが、答えとなる行列の形を考えてから、その各要素を計算するには、左側の行列のどの行と右側の行列のどの列の各要素を掛けて足し挙げればよいかを考えるとよいでしょう。

上の例の答と計算の関係をまとめると次のようになります。

まず、答えは、(2×2 行列)×(2×2 行列)ですので、外側の(2×2 行列)になります。

計算方法は、

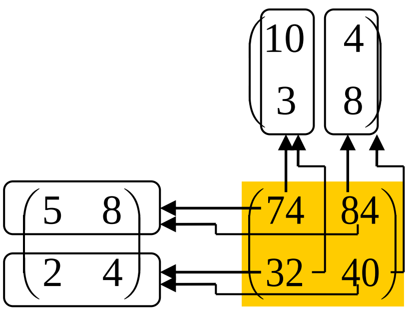
(答の 1 行 1 列)＝(左側の行列の 1 行目各要素)×(右側の行列の 1 列目各要素)の合計

(答の 1 行 2 列)＝(左側の行列の 1 行目各要素)×(右側の行列の 2 列目各要素)の合計

(答の 2 行 1 列)＝(左側の行列の 2 行目各要素)×(右側の行列の 1 列目各要素)の合計

(答の 2 行 2 列)＝(左側の行列の 2 行目各要素)×(右側の行列の 2 列目各要素)の合計

これをイメージで表すと次のようになります。網掛けの答の行列の各要素が、元の行列のどの行と列を使って計算したかを示しています。



答の各要素に対応した左側の行列の行の各要素と右側の行列の列の各要素同士が掛け合わされて足されていることが分かります。

行列の乗算では、掛けられる方と掛ける方の順番が変わると、特別な場合を除いて答えが異なります。（交換法則が成立しない）

$$\begin{pmatrix}5 & 8\\2 & 4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}10 & 4\\3 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(5\times10)+(8\times3) & (5\times4)+(8\times8)\\(2\times10)+(4\times3) & (2\times4)+(4\times8)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}74 & 84\\32 & 40\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}10 & 4\\3 & 8\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}5 & 8\\2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(10\times5)+(4\times2) & (10\times8)+(4\times4)\\(3\times5)+(8\times2) & (3\times8)+(8\times4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}58 & 96\\31 & 56\end{pmatrix}$$

また、逆にすると計算自体ができなくなることもあります。
例えば、
(2×3)×(3×4)は、内側の数字が同じですので計算ができますが、
これを入れ替えて
(3×4)×(2×3)にすると、左側の列数(4)と右側の行数(2)が違ってしまいますので、計算自体ができなくなります。

このようなことを踏まえて考えると、行列の乗算では次の法則が成立します。

結合法則　（ＡＢ）Ｃ　＝　Ａ（ＢＣ）

分配法則
①　Ａ（Ｂ＋Ｃ）　＝　ＡＢ＋ＡＣ
②　（Ａ＋Ｂ）Ｃ　＝　ＡＣ＋ＢＣ

２ 特殊な行列

行列の中には、その形や含まれる要素、元の行列との関係から、名前がつけられたものがありますので、それらを紹介します。

(1) 正方行列

行と列の数が等しい行列(2×2 行列、3×3 行列等)を正方行列といいます。正方行列には、特別な名称を付された行列があります。

ア 対角行列

行列の左上から右下にいたる、行列の対角線上の要素(対角要素)以外がすべて 0 である行列を、対角行列といいます(対角線上の要素に 0 があっても対角行列です)。

具体例としては、次のようなものがあります。

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

産業連関分析では、ベクトルを対角行列化(対角行列にすること)して計算を行うことがあります。

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

これには、幾つかの利点があります。

その一つとしては、対角化によって、対角行列化後の形と同じ行列と加減算ができるということです。

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 5 \\ 9 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 9 & 3 \\ 2 & 6 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 10 & 5 \\ 9 & 8 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 5 \\ 9 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 9 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & -4 & 5 \\ 9 & 8 & 2 & -9 \end{pmatrix}$$

次に、対角行列化した行列は、左から掛けると、行ベクトルを掛けたのと同じような計算ができるという利点があげられます。

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 5 \\ 9 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 & 111 & 65 & 66 \end{pmatrix}$$

縦に合計すると一致

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 5 \\ 9 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 & 3 \\ 6 & 9 & 15 & 18 \\ 49 & 14 & 21 & 35 \\ 90 & 80 & 20 & 10 \end{pmatrix}$$

同様に、対角行列化した行列は、右から掛けると、列ベクトルを掛けたのと同じような計算ができるという利点があります。

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 5 \\ 9 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 122 \\ 106 \\ 84 \\ 57 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 5 \\ 9 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 24 & 63 & 30 \\ 2 & 9 & 35 & 60 \\ 7 & 6 & 21 & 50 \\ 9 & 24 & 14 & 10 \end{pmatrix}$$

横に合計すると一致

イ 単位行列

対角行列のうち、左上から右下にいたる対角線上の要素がすべて１である行列を「単位行列」といい、「Ｉ」と表します。

単位行列Ｉの重要な性質としては、単位行列Ｉにどのような行列Ａを乗じても、その乗じた結果は行列Ａと等しくなる、つまり、ＡＩ＝Ａが成立することが挙げられます。

スカラーの数字に「1」を掛けても元の数字のままであるのと似ています。

$$
\mathrm{I}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

また、Ｉは、どちらから掛けても結果は同じです。

つまり、

ＡＩ＝ＩＡ＝Ａ　　となります。

ウ 転置行列

行列の行と列を入れ替えた行列を転置行列といいます。行列Ａの転置行列は、通常「Ａ’」（Ａプライム）と表します。例えば、

$$
\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}
$$

とすると、その転置行列は、

$$
\mathrm{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}
$$

となります。

産業連関分析では、価格分析を行う際に使用します。

※ 転置行列は、ＡｔやＡＴと表示されることもあります。

(2) 逆行列

行列Ａに、ある行列Ｂを乗じた場合、その積が単位行列Ｉとなるような行列Ｂを行列Ａの逆行列といいます。通常「A^{-1}」と表します。

この逆行列は、Ａが正方行列の場合のみ存在し、Ａと同じ型になります。

また、逆行列は、右側から掛けても左側から掛けても、その積は単位行列Ｉとなります。

式で書くと、ＡＢ＝ＩかつＢＡ＝Ｉとなるような行列Ｂのことです。

このことから分かりますように、行列Ａの逆行列がＢだとすると、行列Ｂの逆行列は行列Ａということになります。

では、この性質を使って、逆行列を求めてみましょう。

行列　$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$　　**逆行列**　$B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=A^{-1}$　　**単位行列**　$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

として、行列Ａの逆行列Ｂを求めます。

ＡＢ＝Ｉとなりますので、

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1\times a)+(2\times c) & (1\times b)+(2\times d)\\ (3\times a)+(4\times c) & (3\times b)+(4\times d)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

それぞれの要素を取り出してみると、

a ＋ 2c ＝ 1　・・・①

b ＋ 2d ＝ 0　・・・②

3a ＋ 4c ＝ 0　・・・③

3b ＋ 4d ＝ 1　・・・④

③－①×2 ＝ 0-1×2 より、

(3a ＋ 4c)－(a ＋ 2c)×2＝a＝0－1×2＝-2

a=-2 を①に代入して、

-2+ 2c ＝ 1

2c=3　　　　c=1.5

④－②×2 ＝ 1-0×2 より、

(3b ＋ 4d)－(b ＋ 2d)×2＝b＝1－0×2＝1

b=1 を②に代入して、

1+2d ＝ 0

2d=-1　　　　d=-0.5

つまり、

逆行列　$B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1.5 & -0.5\end{pmatrix}=A^{-1}$

となります。

念のため検算をしてみると、

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1.5 & -0.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1.5 & -0.5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

となり、逆行列が求められていることが確認できます。

一般的に、行列Ｂの逆行列は、

$$B^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

例の行列で計算してみると、

$$B^{-1}=\frac{1}{(-2\times-0.5)-(1\times1.5)}\begin{pmatrix}-0.5 & -1\\ -1.5 & -2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{-0.5}\begin{pmatrix}-0.5 & -1\\ -1.5 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=A$$

となり、Ｂの逆行列Ａが求められます。

逆行列を使うと、連立一次方程式の解が求められます。
例えば、次のような連立一次方程式があるとします。

$$\begin{cases} x+2y=10\\ 3x+4y=40\end{cases}$$

この方程式を、行列を使って書くと、次のようになります。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 40 \end{pmatrix}$$

行列　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$　　**逆行列**　$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} = A^{-1}$

ですので、両辺に逆行列Ｂを左から掛けると、

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -5 \end{pmatrix}$$

となり、ｘ＝20、ｙ＝-5　という解が求められます。

産業連関分析においても、このような関係を用いて、経済波及効果を求めています。

3 産業連関分析への行列の利用

(1) 消費内生化モデル

均衡産出高モデルでは、通常第 2 次間接効果までを算出しますが、この第 2 次間接効果は、産業連関表内の関係で整合がとれていない部分がある等の問題もあります。

そこで、家計消費支出を内生化したモデルを考えてみます。

ア 均衡産出高モデルの第 2 次間接効果の問題点

(ｱ) 雇用者所得と家計消費支出の関係

一般的な均衡産出高モデルの第 2 次間接効果では、雇用者所得の一部が家計消費支出によって支出されるとしています。しかし、実際の産業連関表では、次のようになっています。

(単位:億円)

	全国	埼玉県
雇用者所得	2,657,992	105,363
営業余剰	1,039,053	49,692
家計消費支出	2,978,403	173,616

雇用者所得の一部が、家計消費支出によって支出されるはずですが、家計消費支出の方が雇用者所得の額を上回っています。

これには、二つ理由が考えられます。

一つは、雇用者所得は、県(国)内概念であるのに対し、家計消費支出は県(国)民概念で計算されていることによります。そのため、埼玉県のように県外で就業する県民が多い県では、県外からの雇用者報酬が加算されていません。この県外からの雇用者報酬は、5 兆円以上になり、雇用者所得の半分以上にもなります。しかし、この額を加えても、家計消費支出を超えません。全国でも同様です。海外からの所得は、財産所得と雇用者報酬を合わせると、30 兆円になり、その額を雇用者所得に加えて家計消費支出を比べても、家計消費支出の方が雇用者所得の額を上回ることになります。したがって、この理由のみでは説明できません。

二つ目の理由は、営業余剰には、個人業主の所得が含まれていることです。農林漁業等、個人業主が多い部門では、かなりの個人所得が含まれていることになります。国民経済計算では、営業余剰・混合所得として表示されています。

よって、雇用者所得に県外(海外)からの雇用者報酬及び営業余剰を加えた額から、家計消費支出がなされるとすると関係が説明できることになります。

本県では、県民所得係数と消費転換係数を算出することにより、この問題点を解消しています。(第３章　４　経済波及効果分析（４）参照)

㈠ 波及効果の算出方法

一般的な均衡産出高モデルでは、第２次間接効果は、直接効果＋第１次間接効果に対する所得増加額に対して発生するものとしています。時間的な関係は明確ではないものの、実際は直接または間接効果が発生するたびに第２次間接効果が発生し、それに対してまた間接効果が発生するという過程が繰り返されているはずです。そのような状況が捨象されています。

・一般的な均衡産出高モデル

直接効果

→　第１次間接効果　→第２次間接効果

・現実の波及

直接効果　＋　直接効果による所得増加による効果

→　第１次間接効果＋第１次間接効果による所得増加による効果

→　第２次間接効果＋第２次間接効果による所得増加による効果　→　以降繰り返し

イ 問題点の解消方法

㈦ 雇用者所得と家計消費支出の関係

(県内)雇用者所得と家計消費支出の関係ではなく、県民所得と家計消費支出の関係として整理する方法が考えられます。

県民所得は、県内雇用者報酬＋営業余剰・混合所得＋県外からの所得(純)ですので、県民経済計算から、県外からの所得(純)を求めれば、県民所得と家計消費支出の比率が計算できます。

その額を計算すると次のようになります。

(単位:億円)

	全国	埼玉県
雇用者所得	2,657,992	105,363
営業余剰	1,039,053	49,692
県(海)外からの雇用者報酬(純)	1,090	49,623
県(海)外からの財産所得(純)	210,544	7,897
家計消費支出	2,978,403	173,616

それぞれの項目に対する家計消費支出の比率を求めると次のようになります。

(単位:億円)

	全国	埼玉県
雇用者所得	112.1%	164.8%
営業余剰	286.6%	349.4%
雇用者所得＋営業余剰	80.6%	112.0%
雇用者所得＋営業余剰 ＋県(海)外からの所得(純)	76.2%	81.7%

これを見ましても、県民所得(要素費用表示)に対する家計消費支出の関係が、最もあてはまりがよさそうです。この比率(埼玉県)を所得増加のうち消費支出に回る割合とすることがよいことが分かります。

そこで埼玉県では、県民経済計算から、(県民)所得係数と消費転換係数を計算し、分析を行っています。(第３章　４　経済波及効果分析(4)参照)

(ｲ) 波及効果の算出方法

第２次間接効果を第１次間接効果と同時に計算することによって問題点を解消します。

家計消費支出列と雇用者所得＋営業余剰のうち消費に回る分((ｱ)の比率分)の行を内生部門に移し、その産業連関表を用いて波及効果を計算します。これにより、消費に対しても、究極的な間接効果が求められるという長所があります。